CIĄGI W ARKUSZU

Jak już wiesz, arkusz kalkulacyjny to świetne narzędzie do analizowania obliczeń i szukania prawidłowości. Bardzo przydatny jest też podczas badania granic ciągów liczbowych.
Ciąg liczbowy to zbiór liczb (wyrazów ciągu) ustawionych w określonej kolejności. Pojęcie to znasz z klasy 7 – przypomnij sobie ciąg Fibonacciego i problem dotyczący rozmnażania się królików.

Dziś zaczniesz od ciągu potęg liczby 2.

- W nowym arkuszu najpierw utwórz nagłówki tabeli, pierwszą kolumnę nazwij ***n***, a drugą – ***potęgi***.
- Uzupełnij kolumnę ***n*** – za pomocą metody serii danych wstaw liczby od 1 do 50.
- Uzupełnij kolumnę ***potęgi***. Znajdą się w niej wyniki obliczeń – kolejne potęgi dwójki uzyskane według podanej przez ciebie formuły.
    - Do komórki **B2** wpisz wartość 2, a do komórki **B3** – formułę obliczania kolejnych potęg. Formułę zacznij od znaku równości, następnie wpisz podstawę potęgi (**B$2**), symbol oznaczający podnoszenie do potęgi (^) oraz wykładnik potęgi (**A3**).

	A	B
1	*n*	*potęgi*
2	1	2
3	2	=B$2^A3

Rys. 1. Obliczanie kolejnych potęg liczby 2

    - Zauważ, że przed dwójką w adresie komórki **B2** został dopisany symbol **$** – w ten sposób podczas kopiowania formuły numer wiersza pozostanie niezmieniony (podstawą potęgi będzie liczba wpisana w komórce **B2**).
    - Skopiuj formułę do pozostałych komórek w kolumnie **B**.
- Obejrzyj wyniki obliczeń. Ciąg jest rosnący – składa się z coraz większych liczb: $2^1 = 2$, $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1\,048\,576$, $2^{27} =$… 1,34E+08? Co to za liczba?

22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	1,34E+08
28	2,68E+08
29	5,37E+08
30	1,07E+09
31	2,15E+09

Rys. 2. Notacja naukowa

Od pewnego momentu Excel wyświetla bardzo duże (lub bardzo małe) liczby w postaci tzw. notacji naukowej – w celu skrócenia zapisu takich liczb: 1,34E+08 = $1{,}34 \cdot 10^8 = 1{,}34 \cdot 100\,000\,000 = 134\,000\,000$. Ale czy na pewno jest to wartość 2^{27}? Jeśli powiększysz szerokość kolumny **B** i sformatujesz zawartość komórki (wybierzesz w okienku Liczba format liczbowy), zobaczysz dokładną wartość: 134 217 728. Excel liczy poprawnie, ale nie wyświetla dokładnego wyniku, gdy ma za mało miejsca w komórce. W pamięci przechowuje 15 cyfr znaczących, co oznacza, że dopiero dla liczb, które mają w zapisie więcej niż 15 cyfr, zaczyna być niedokładny.

- Teraz przejdź do kolumny **C** – nazwij ją ***odwrotności*** i odpowiednio uzupełnij. Wpisz w komórkę **C2** formułę obliczającą odwrotności potęg: **=1/B2** i skopiuj do następnych komórek. Tym razem liczby są coraz mniejsze, ciąg jest malejący.
- Kolumnę **D** zatytułuj ***sumy odwrotności*** i oblicz sumy odwrotności. Do komórki **D2** skopiuj wartość z komórki **C2**, w komórce **D3** wpisz formułę **=D2+C3**, czyli do poprzedniej sumy dodaj bieżącą odwrotność. Sprawdź, że to działa i oblicz sumy odwrotności dla wszystkich 50 wierszy.
- Obejrzyj wyniki. Zwróć uwagę, że kolejne sumy zbliżały się do liczby 1, aby wreszcie osiągnąć wartość, której arkusz nie odróżnia od jedynki. Od pewnego miejsca wynik sumowania się nie zmienia.

24	16777216	5,96046E-08	0,99999994
25	33554432	2,98023E-08	0,99999997
26	67108864	1,49012E-08	0,99999999
27	1,34E+08	7,45058E-09	0,99999999
28	2,68E+08	3,72529E-09	1
29	5,37E+08	1,86265E-09	1
30	1,07E+09	9,31323E-10	1
31	2,15E+09	4,65661E-10	1
32	4,29E+09	2,32831E-10	1
33	8,59E+09	1,16415E-10	1

Rys. 3. Wyniki sumowania odwrotności potęg liczby 2

Możesz sprawdzić, że obliczanie kolejnych wyrazów (choćby ich było 1000) nic nie zmieni – ich suma nie przekroczy 1. Suma odwrotności potęg liczby 2 jest bowiem ograniczona, a granicę stanowi liczba 1.

KALKULATOR I OCHRONA ARKUSZA

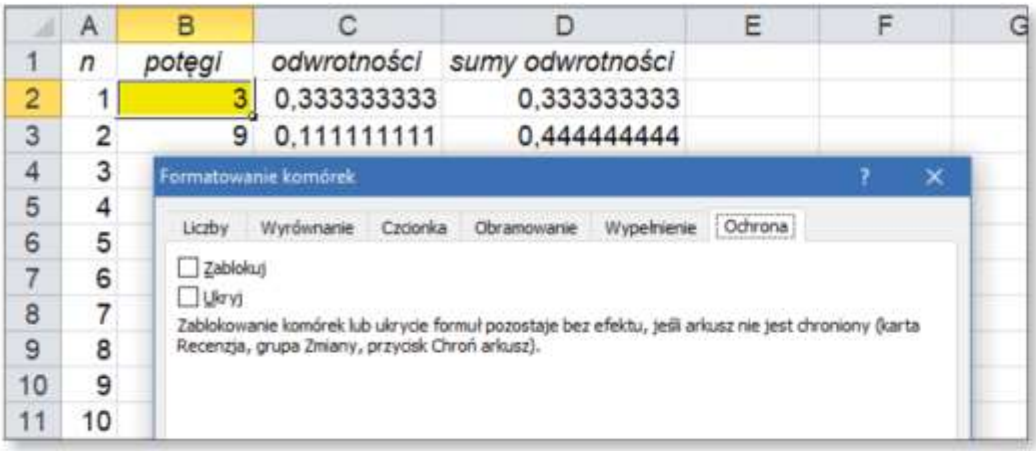
Zauważ, że arkusz został zbudowany tak, by wyniki obliczeń w kolumnach **B**, **C** i **D** zależały od wartości wpisanej do komórki **B2**. Oznacza to, że można w nim badać potęgi dowolnych liczb – wpisz np. do komórki **B2** liczbę 3. Na poniższym zrzucie komórka **B2** została zaznaczona, dodano jej krawędzie i żółte wypełnienie.

	A	B	C	D
1	*n*	*potęgi*	*odwrotności*	*sumy odwrotności*
2	1	3	0,333333333	0,333333333
3	2	9	0,111111111	0,444444444

Rys. 4. Sprawdzenie działania kalkulatora

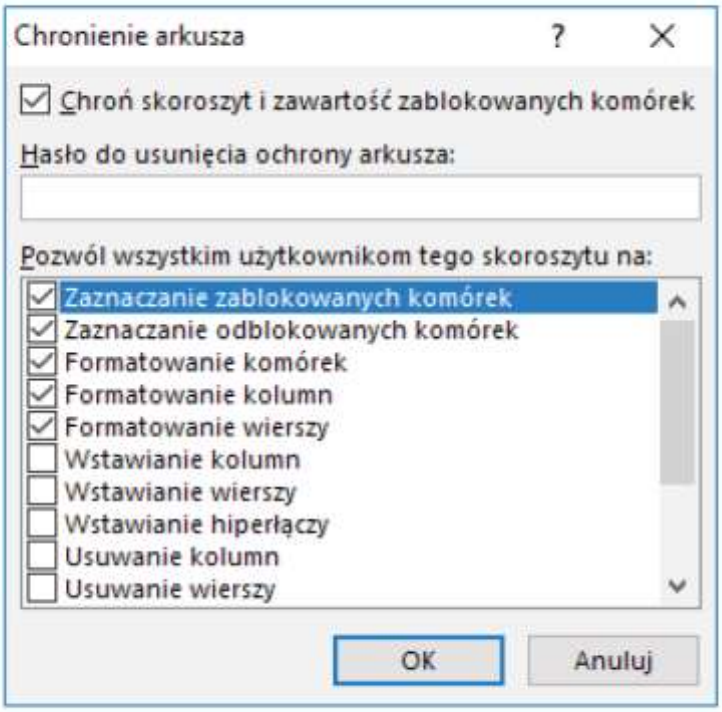
Aby stworzony przez ciebie kalkulator działał poprawnie, trzeba włączyć ochronę arkusza, która uniemożliwi wprowadzanie zmian w innych komórkach niż komórka **B2**.

- Kliknij komórkę **B2** prawym przyciskiem myszy i z menu podręcznego wybierz polecenie **Formatowanie komórek**.
- W wyświetlonym oknie **Formatowanie komórek** wybierz kartę **Ochrona** i odznacz pole **Zablokuj**.



Rys. 5. Formatowanie komórek

- Włącz ochronę dla pozostałych komórek – na karcie **Recenzja** kliknij przycisk **Chroń arkusz**, a następnie w wyświetlonym oknie **Chronienie arkusza** kliknij przycisk **OK**.

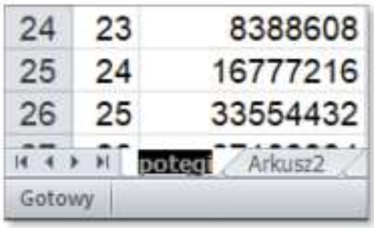


Rys. 6. Włączanie ochrony arkusza

SILNIA

Który z ciągów rośnie najszybciej? Porównaj ze sobą ciąg liczb naturalnych, ciąg powstający przez podnoszenie kolejnych liczb naturalnych do kwadratu, ciąg powstający przez podnoszenie kolejnych liczb naturalnych do trzeciej potęgi czy ciąg tworzony przez obliczanie silni każdej kolejnej liczby naturalnej (silnia to iloczyn kolejnych liczb, oznaczamy ją wykrzyknikiem, np. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Aby obliczyć silnię kolejnej liczby naturalnej, można też pomnożyć przez tę liczbę silnię poprzedniej liczby, np. 5! = 4! · 5).
Przejdź do trzeciego arkusza w swoim skoroszycie, a następnie zmień nazwę pierwszego arkusza na **potęgi**, drugiego na **co rośnie szybciej**, a trzeciego na **silnia**.



Rys. 7. Nadawanie nazwy arkuszowi

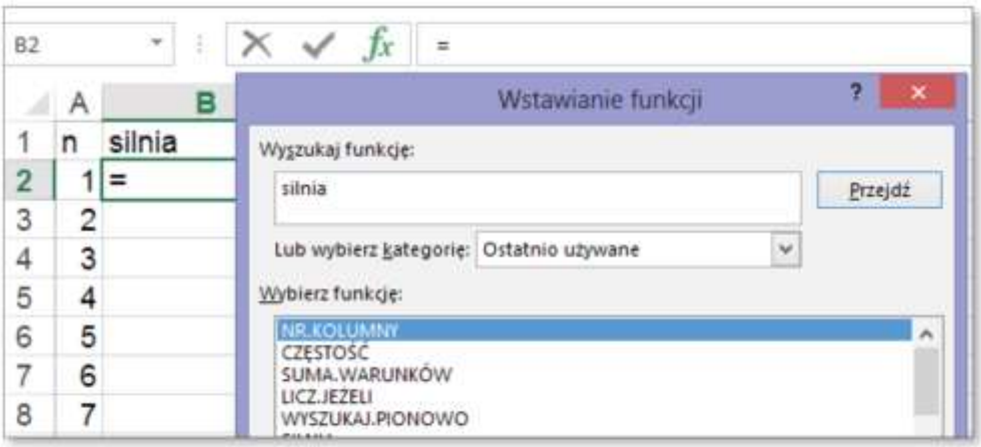
Utwórz tabelę na wzór tej poniżej. Zwróć uwagę, że w tym przypadku nie trzeba podawać pierwszego wyrazu ciągu – każdy wyraz można obliczyć z podanego wzoru, zaczynając od pierwszej liczby naturalnej.

A	B	C	D	E
który wyraz ciągu?	liczby naturalne	liczby naturalne do kwadratu	liczby naturalne do sześcianu	silnia liczb naturalnych
1	1	1	1	1
2	2	4	8	
3	3	9	27	
4	4	16	64	

Rys. 8. Tabela z kolejnymi ciągami

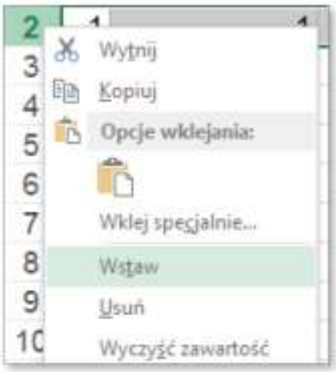
Uzupełnienie kolumn **A**–**D** nie powinno sprawić ci większego kłopotu. Wypełnij je, a kolumnę **E** pozostaw na razie pustą.

- W arkuszu **silnia** kolumnę **A** nazwij ***n*** i uzupełnij kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 50. Kolumnę **B** nazwij **silnia** – tu będziesz obliczać kolejne silnie.
- Silnia jest funkcją, więc trzeba jej poszukać wśród funkcji arkusza. Kliknij f_x na pasku formuły. W wyświetlonym oknie **Wstawianie funkcji** wpisz **silnia** i kliknij przycisk **Przejdź**.



Rys. 9. Wyszukiwanie funkcji

- W kolejnym oknie **Argumenty funkcji** wpisz adres komórki **A2** i zatwierdź wstawienie funkcji przyciskiem **OK**.
- Wpisaną przez arkusz formułę **=SILNIA(A2)** skopiuj do następnych komórek.
- Sprawdź, czy można obliczyć silnię 0.
    - Wstaw dodatkowy drugi wiersz – kliknij numer wiersza prawym przyciskiem myszy i z menu podręcznego wybierz polecenie **Wstaw**.



Rys. 10. Wstawianie nowego wiersza

    - Wpisz w nowym drugim wierszu w komórce **A2** wartość 0, a do komórki **B2** skopiuj formułę z komórki **B3**. Jak widzisz, 0! = 1. To kwestia umowy – tak została zdefiniowana ta funkcja.
- A teraz oblicz odwrotności silni i sumy odwrotności.

	A	B	C	D
1	*n*	*silnia*	*odwrotności*	*sumy odwrotności*
2	0	1	1	1
3	1	1	1	2
4	2	2	0,5	2,5
5	3	6	0,166666667	2,666666667
6	4	24	0,041666667	2,708333333
7	5	120	0,008333333	2,716666667
8	6	720	0,001388889	2,718055556
9	7	5040	0,000198413	2,718253968
10	8	40320	2,48016E-05	2,71827877
11	9	362880	2,75573E-06	2,718281526
12	10	3628800	2,75573E-07	2,718281801
13	11	39916800	2,50521E-08	2,718281826
14	12	479001600	2,08768E-09	**2,718281828**
15	13	6227020800	1,6059E-10	2,718281828
16	14	87178291200	1,14707E-11	2,718281828
17	15	1,30767E+12	7,64716E-13	2,718281828

Rys. 11. Wyniki obliczeń w arkuszu silnia

W powyższym arkuszu przedstawiono wyniki obliczeń i zaznaczono granicę sum odwrotności silni. Wyrazy ciągu w kolumnie **D** zbliżają się do konkretnej liczby **2,718281828**. Znajdź tę liczbę w sieci.

- Wróć do arkusza **co rośnie szybciej**, uzupełnij kolumnę **E** i odpowiedz, który z danych ciągów rośnie najszybciej.

ZADANIA

ZADANIE 1

Dany jest ciąg o pierwszym wyrazie równym 2, zbudowany tak, że każdy kolejny wyraz powstaje przez mnożenie poprzedniego przez 2. Przygotuj arkusz, za pomocą którego obliczysz kolejne wyrazy tego ciągu. Zmodyfikuj gotowy arkusz tak, aby pierwszy wyraz ciągu można było mnożyć przez dowolną liczbę wpisaną do wybranej komórki. Wygeneruj w ten sposób 50 wyrazów ciągu.

ZADANIE 2

Dany jest ciąg, w którym kolejny wyraz otrzymuje się przez dodanie do poprzedniego wyrazu pewnej stałej liczby. Przygotuj arkusz, za pomocą którego obliczysz kolejne wyrazy ciągów o początkowych wyrazach: 2, 5, 8, 11, 14, … oraz 120, 100, 80, 60, 40, …. Zmodyfikuj arkusz tak, aby pierwszy wyraz ciągu i dodawaną liczbę można było wpisać do wybranych komórek. Wygeneruj w ten sposób 50 wyrazów ciągu.

ZADANIE 3

Istnieją ciągi – całkiem proste w konstrukcji – które są zagadkami nawet dla matematyków. Reguła konstruowania jednego z takich ciągów jest następująca: weź dowolną liczbę naturalną – będzie ona początkiem ciągu; jeśli jest parzysta, podziel ją przez 2, jeśli nieparzysta – pomnóż przez 3 i dodaj 1; otrzymana liczba będzie kolejnym wyrazem ciągu (np. zaczynając od liczby 6, otrzymujemy ciąg: 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Kończymy na liczbie 1, bo inaczej wygenerujemy pętlę 4, 2, 1, 4, 2, 1 itd.).

Okazuje się, że niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy, po serii obliczeń dojdziemy do liczby 1! Matematycy na razie ani nie udowodnili, że tak będzie zawsze (tzn. dla dowolnej liczby wybranej na początek ciągu), ani nie udało im się znaleźć przykładu liczby, która zachowuje się inaczej. Problem ten nazywany jest problemem Collatza.

Spróbuj skonstruować taki ciąg w Excelu. Potrzebne funkcje znajdziesz w kreatorze funkcji. Są to:

- funkcja warunkowa JEŻELI(warunek; wartość dla TAK; wartość dla NIE);
- funkcje logiczne CZY.PARZYSTE lub CZY.NIEPARZYSTE.

Przykładowy arkusz z rozwiązaniem może wyglądać tak: